Квантова механіка. Фізичний факультет, 4 курс, 7 семестр.

Заняття №11. ***Рух в центральному полі: сферичні хвилі, частинка в сферично симетричній прямокутній ямі скінченої глибини***

1. Перевірка д/з.

Задача 1. Знайти $\left\langle r^{-1}\right\rangle$ в стані, що описується хвильовою функцією $\psi(r,\theta,\varphi)=Ae^{-r}$. Чому дорівнює в цьому стані $\left\langle \hat{\vec{L}}^2\right\rangle$ та $\left\langle \hat{L}_z\right\rangle$?

2. Гамільтоніан частинки, котра рухається в центральному полі

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}\right]+U(r)=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hbar^2\hat{\vec{l}}^2}{2\mu r^2}+U(r);$$

$$\Delta_{\theta\varphi}=\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]=-\hat{\vec{l}}^2.$$

Задача 2. Дослідити стаціонарні стани вільної частинки з певною енергією, певним моментом l та його проекцією m (сферичні хвилі). (див. ЛЛ § 33)

Комутаційні співвідношення для $\hat{H},\hat{\vec{l}}^2,\hat{l}_z$:

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{l}}^2\right]=0,\quad \left[\hat{H},\hat{l}_z\right]=0,\quad \left[\hat{\vec{l}}^2,\hat{l}_z\right]=0.$$

Поділ змінних: $\psi(\vec{r})=\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

Рівняння для радіальної частини хвильової функції $R(r)$ при $U(r)=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}R(r)=ER(r).$$

Важливі співвідношення: $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR)=\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}$

Заміна:

$$R(r)=\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}};\quad R'(r)=\frac{\chi'(r)}{\sqrt{r}}-\frac{1}{2}\frac{\chi(r)}{r\sqrt{r}};\quad R''(r)=\frac{\chi''(r)}{\sqrt{r}}-\frac{\chi'(r)}{r\sqrt{r}}+\frac{3}{4}\frac{\chi(r)}{r^2\sqrt{r}}.$$

Розв'язок: $\psi_{klm}(r)=\sqrt{\frac{2\pi k}{r}}J_{l+1/2}(kr)Y_{lm}(\theta,\varphi);\quad E_k=\frac{\hbar^2k^2}{2\mu}.$

$J_{l+1/2}(kr)$ – функції Беселя напівцілого аргументу, $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ – сферичні функції.

<u>Задача 3.</u> Визначити рівні енергії для руху частинки в полі сферично симетричної прямокутної ями скінченої глибини

$$U(r)=\begin{cases}-U_0,\ r<a;\\ 0,\quad r>a.\end{cases}$$

Розглянути спочатку випадок $l=0$ (ЛЛ § 33(1)), а потім, $l\neq 0$ (Флюгге З. Задачі з квантової механіки. Т.1. стор. 168, задача 63).

3. Контрольна робота (~ 30 хвилин). Робота складається з двох завдань, максимальна оцінка – **<u>10 балів</u>**

<u>Домашнє завдання</u> ЛЛ § 36(1,2)

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; ЛЛ – Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика

Дод.літ: Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т.1, Т.2. 1974